Minitest de préparation du devoir commun 2022 – 04 août 2022 – P29

1 Exercice d'analyse (10 minutes)

1.1 Énoncé

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On définit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ et $H(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

Rappeler pourquoi F est dérivable et donner sa dérivée.
En déduire que G et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer leurs dérivées.

1.2 Indications

Une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. On peut en « invoquer » une et travailler avec. Dans ce type d'exercice, c'est très utile.

1.3 Correction

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

On définit $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $G(x) = \int_x^{x+1} f(t)\,dt$ et $H(x) = \int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

f continue sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f et on a $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = f(x)$.

f étant continue et F étant une primitive de f sur $\mathbb{R}$, on a : $G(x) = F(x+1) - F(x)$ et

$H(x) = F(x^2) - F(x)$.

G et H sont dérivables sur $\mathbb{R}$ comme différences de composées de fonctions dérivables.
On a :
$G'(x) = F'(x+1) - F'(x) = f(x+1) - f(x)$
$H'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x)$

2 Exercice d'algèbre (20 minutes)

2.1 Énoncé

L'application $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $f(P) = ((X+1)P(X-1))'$ est-elle linéaire ?

Calculer la matrice de cette application relativement à la base $(X-1, X+1, X^2+1)$.

2.2 Indications

On revient à la définition.

2.3 Correction

Montrons que l'application est linéaire.

Soit $\left(P,Q\right)\in\left(\mathbb{R}_2\left[X\right]\right)^2$ et soit $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f\left(\lambda P+Q\right)=\left(\left(X+1\right)\left(\lambda P+Q\right)\left(X-1\right)\right)' &\underbrace{=}_{\substack{\left(A+B\right)\left(x\right)=A\left(x\right)+B\left(x\right)\\ \text{par définition}}}\left(\lambda\left(X+1\right)P\left(X-1\right)+\left(X+1\right)Q\left(X-1\right)\right)'\\ &\underbrace{=}_{\substack{\text{la dérivation}\\ \text{est linéaire}}}\lambda\left(\left(X+1\right)P\left(X-1\right)\right)'+\left(\left(X+1\right)Q\left(X-1\right)\right)'\\ &=\lambda f\left(P\right)+f\left(Q\right)\end{aligned}$$

On calcule les images des polynômes (ou vecteurs) $X-1, X+1$ et X^2+1. On exprimera les résultats relativement à la base $\left(X-1, X+1, X^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}f\left(X-1\right)&=???\left(X-1\right)+???\left(X+1\right)+???\left(X^2+1\right)\\ f\left(X+1\right)&=???\left(X-1\right)+???\left(X+1\right)+???\left(X^2+1\right)\\ f\left(X^2+1\right)&=???\left(X-1\right)+???\left(X+1\right)+???\left(X^2+1\right)\end{aligned}$$

Il me reste à trouver les coefficients…

$f\left(X-1\right)=\left(\left(X+1\right)\left(X-1-1\right)\right)'=\left(\left(X+1\right)\left(X-2\right)\right)'=\left(X^2-X-2\right)'=2X-1$

Il reste à résoudre $2X-1=a\left(X-1\right)+b\left(X+1\right)+c\left(X^2+1\right)=cX^2+\left(a+b\right)X-a+b+c$ d'inconnue $\left(a,b,c\right)\in\mathbb{R}^3$.

En identifiant, on trouve que c est nécessairement nul.

On a par ailleurs $\begin{cases}a+b=2\\ -a+b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Donc la première colonne de la matrice de l'application f relativement à la base $\left(X-1, X+1, X^2+1\right)$ (au départ et à l'arrivée) est : $\begin{pmatrix}3/2\\ 1/2\\ 0\end{pmatrix}$.

On recommence avec $f\left(X+1\right)$. On trouve :

$f\left(X+1\right)=\left(\left(X+1\right)X\right)'=\left(X^2+X\right)'=2X+1=\dfrac{1}{2}.\left(X-1\right)+\dfrac{3}{2}.\left(X+1\right)+0.\left(X^2+1\right)$.

Et enfin, on calcule et décompose $f\left(X^2+1\right)$.

$$\begin{aligned}f\left(X^2+1\right)&=\left[\left(X+1\right)\left[\left(X-1\right)^2+1\right]\right]'=\left(\left(X+1\right)\left(X^2-2X+2\right)\right)'=\left(X^3-X^2+2\right)'\\ &=-2X+3X^2\end{aligned}$$

On résout $a\left(X-1\right)+b\left(X+1\right)+c\left(X^2+1\right)=-2X+3X^2$ d'inconnue $\left(a,b,c\right)\in\mathbb{R}^3$.

$a\left(X-1\right)+b\left(X+1\right)+c\left(X^2+1\right)=-2X+3X^2\Leftrightarrow -a+b+c+\left(a+b\right)X+cX^2=-2X+3X^2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b+c=0\\ a+b\qquad=-2\\ \qquad c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a+b\qquad=-3\\ a+b\qquad=-2\\ \qquad c=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=-\dfrac{5}{2}\\ c=3\end{cases}$$

On arrive à la fin (si j'attrape le vilain qui fait des sujets courts qui conduisent à des calculs longs, c'est fessée direct !)

$$mat_{\left(X-1,X+1,X^2+1\right)}\left(f\right)=\begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

■